

НАУЧНО-ЗАБАВНАЯ БИБЛИОТЕКА ДЛЯ СЕМЬИ И ШКОЛЫ
(25 книжекъ).

Подъ редакц. препод. моск. гимн. **НИК. АМЕНИЦКАГО**

Выпускъ I-й.

АРИѦМЕТИЧЕСКІЯ ИГРЫ.

СЪ РИСУНКАМИ.

СОДЕРЖАНІЕ:

Игра «взапуски». — Угадываніе залуманныхъ чисель
и картинокъ. — Башня Люкаса. — «Игра въ иглу».

Цѣна 15 коп.

МОСКВА. — 1912.

Складъ изданія у кн-цы **А. С. Панафидиной**
(Лялинъ пер., соб домъ).

МОСКВА.

Типографія Русскаго Товарищества, Мыльниковъ пер., соб. домъ.

Телефонъ 18-35.

Отъ редактора.

Имѣя въ виду все болѣе и болѣе возрастающій интересъ къ *такой* учебно-математической литературѣ, которая затрагиваетъ живые и любопытные вопросы и вмѣстѣ съ тѣмъ возбуждаетъ любознательность, пытливость и самодѣятельность юныхъ читателей, — я полагаю, что предпринимаемое изданіе «*Научно-забавной библіотеки*» вполнѣ своевременно и желательно.

Стараясь дать интересный подборъ игръ и занятій, составители стремились придать изложенію таковыхъ возможно бѣольшую простоту и живость, слѣдя въ то же время и за тѣмъ, чтобы высказываемыя попутно мысли были строго обоснованы, а *возможность* того или иного вопроса — была изслѣдована всесторонне.

Принимая все это во вниманіе, составители позволяютъ себѣ надѣяться, что «*Научно-забавная библіотека*» явится для учащейся молодежи средствомъ провести свой досугъ пріятно и съ пользой.

Ник. Аменицкий.

Въ непродолжительномъ времени выйдутъ въ свѣтъ, между прочимъ, слѣдующіе выпуски «Научно-забавной библіотеки»:

Вып. 2. Любопытныя путешествія.

- « 3. Математическія шутки.
- « 4. Фокусы съ узлами и веревками.
- « 5. Игра «Nim».
- « 6. Эквилибристика (опыты, основанные на равновѣсіи тѣлъ).
- « 7. Логика—помощница математики.
- « 8. Домашняя механика и гидростатика.
- « 9. Немного ученія о памяти.
- « 10. Волшебные квадраты.
- « 11. Ходъ коня.
- « 12. Опыты со спичками.
- « 13. Игра въ «15» (Taquin) и друг.

Игра „взапуски“.

Для начала мы познакомимъ читателя съ весьма несложной игрой, которая состоитъ въ слѣдующемъ:

Одинъ изъ играющихъ—назовемъ его А—произносить любое число, но не болѣе 10; тогда другой изъ играющихъ—пусть это будетъ В—произносить въ свою очередь большее число, которое должно превышать число, сказанное А, по меньшей мѣрѣ на 1 и въ крайнемъ случаѣ на 10. Увеличивъ это число на 1, 2, 3, 10, А снова произносить число, послѣ чего наступаетъ опять очередь В. Такимъ образомъ, А и В, соблюдая очередь и указанное правило, увеличиваютъ свои числа до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не будетъ имѣть возможность произнести число **100**. Тотъ, кому выпадаетъ это счастье, и считается побѣдителемъ. Интересно знать, кто изъ нихъ и какимъ образомъ можетъ **на-вѣрняка** достичь побѣды.

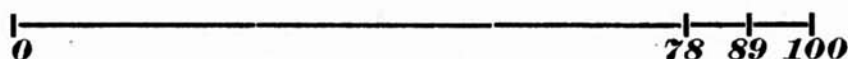
Той же игрѣ можно придать слѣдующую, болѣе наглядную форму:

Два мальчика, Коля и Петя, изъ которыхъ каждый способенъ сдѣлать прыжокъ не болѣе 10 фу-

— 6 —

товъ, *) желаютъ при помощи такихъ (или меньшихъ) прыжковъ пройти путь длиною въ 100 футовъ, соблюдая при этомъ слѣдующія правила: 1) каждый изъ нихъ долженъ дѣлать прыжокъ не менѣе 1 фута и не болѣе 10 футовъ; 2) если эту своеобразную «скачку» началъ Коля, то Петя обязанъ продолжать ее съ того мѣста, гдѣ остановился Коля, послѣ чего долженъ сдѣлать прыжокъ Коля и непременно съ того мѣста, гдѣ остановился его товарищъ и т. д.; 3) каждый изъ мальчиковъ имѣетъ право дѣлать всякій разъ не болѣе одного прыжка; 4) прыжки, длина которыхъ измѣряется дробнымъ числомъ, напримѣръ, $5\frac{3}{4}$ фута, выражаются ближайшимъ къ нему меньшимъ цѣлымъ числомъ (слѣдовательно, въ нашемъ примѣрѣ вмѣсто $5\frac{3}{4}$ фута слѣдуетъ взять 5 фут.). Побѣдителемъ въ этой игрѣ долженъ считаться тотъ, кто первый окончитъ всю дистанцію.

Полагаемъ, что сами играющіе, при внимательномъ отношеніи къ игрѣ, должны замѣтить, что конечной цѣли, т.-е. точки, обозначенной на фиг. 1 цифрой 100, безусловно достигаетъ



Фиг. 1.

тотъ изъ нихъ, кому удастся первому пройти черезъ точку 89. Дѣло въ томъ, что, когда одинъ изъ играющихъ, скажемъ, Коля попалъ въ точку 89, то въ это время онъ находится на такомъ разстояніи отъ конечнаго пункта, которое превышаетъ

*) Такой на первый взглядъ большой прыжокъ вполне возможно сдѣлать съ разбѣга при помощи длинной палки.

— 7 —

еть на 1 футъ ($100 - 89 = 11$ фут.) наибольшую длину его прыжка (т. е. 10 фут.); поэтому Петя, при помощи одного прыжка, никоимъ образомъ не можетъ достичь побѣды. Но съ другой стороны правила игры требуютъ, чтобы Петя сдѣлалъ прыжокъ, хотя бы длиною всего въ 1 футъ; въ такомъ случаѣ, если онъ прыгнетъ такъ, что окажется въ точкѣ 90, или 91, или 92 и т. д., или въ крайнемъ случаѣ въ точкѣ 98, то Коля въ каждомъ изъ этихъ случаевъ имѣетъ возможность однимъ прыжкомъ закончить требуемую дистанцію и провозгласить себя побѣдителемъ.

Если мы убѣдились, что, попавши на точку 89, можно *навѣрное* достичь побѣды, то нетрудно видѣть, что то же самое можно сказать и относительно предшествующихъ точекъ, разстояніе между которыми равно 11 футамъ (т.-е. 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 и 1). Отсюда слѣдуетъ, что побѣда **на-вѣрняка** обезпечена для *того* изъ играющихъ, *кто начинаетъ состязаніе*; для этого онъ долженъ только первый разъ прыгнуть на 1 футъ, а въ слѣдующій разъ остановиться въ точкѣ 12, затѣмъ въ точкѣ 23 и т. д., дѣлая при этомъ прыжки требуемой длины; когда, такимъ образомъ, играющій достигнетъ точки 78, то слѣдующая его остановка должна быть въ точкѣ 89 и, наконецъ, въ точкѣ 100.

Само собою разумѣется, что такое же состязаніе въ прыганіи можно вести и при другихъ, заранее выбранныхъ условіяхъ, для чего надо только назначить размѣръ дистанціи и наибольшую и наименьшую длину прыжка обоимъ играющимъ.

Что касается неизмѣннаго разстоянія между тѣми точками пути, которыхъ надо непре-

мѣнно держаться, чтобы достичь побѣды, то не трудно видѣть, что оно всегда равно суммѣ наибольшей и наименьшей длинѣ прыжка *); для разсмотрѣннаго случая это разстояніе есть: $10 \text{ ф.} + 1 \text{ ф.} = 11 \text{ фут.}$

Важно замѣтить, что, если длина всего пути выражается такимъ числомъ, которое дѣлится (безъ остатка) на вышеупомянутое постоянное разстояніе, то побѣда должна остаться уже *не* за тѣмъ играющимъ, который начиналъ состязаніе (т.-е. Колей), а за его противникомъ (т.-е. Петей). Дѣйствительно, если длина пути будетъ на примѣръ 99 футовъ, а въ остальномъ условія игры остаются прежнія, то Коля свой первый прыжокъ можетъ дѣлать какой угодно длины, потому что Петя послѣ перваго же прыжка всегда можетъ оказаться въ точкѣ 11, послѣ второго—въ точкѣ 22 и т. д.; послѣ девятаго прыжка достигнетъ точки 99 и побѣдитъ своего соперника.

Для того, чтобы напрактиковаться въ описываемой игрѣ, предлагаемъ читателямъ нѣсколько вопросовъ, рѣшенія которыхъ помѣщены ниже.

Вопросъ 1. Длина всего пути равна 200 фут., а въ остальномъ условія задачи остаются тѣ же, какъ и въ разсмотрѣнномъ выше случаѣ. Одинъ изъ играющихъ (назовемъ его А), полагая, что онъ долженъ и въ этомъ случаѣ сдѣлать первый прыжокъ длиною въ 1 футъ (какъ въ разсмотрѣнномъ ранѣе случаѣ), вскорѣ убѣждается, что сдѣлалъ большую оплошность. Какъ долженъ продолжать игру В, чтобы сдѣлаться побѣдителемъ?

*) Сравн. съ выводами, сдѣланными при рѣшеніи вопроса 4.

— 9 —

Вопросъ 2. Максимальная*) длина прыжка каждаго изъ играющихъ (А и В) равна 8 фут., а минимальная*)—1 футъ; длина всего пути 90 футовъ. Кто изъ играющихъ долженъ побѣдить и какъ будетъ при эгомъ происходить само состязаніе?

Вопросъ 3. Кто долженъ побѣдить, если максимальная длина прыжка 17 дм., минимальная—1 дм., а длина всего пути равна 150 дм.?

Вопросъ 4. Кто долженъ побѣдить, если максимальная длина прыжка 10 фут., минимальная—3 фута, а длина всего пути равна 182 футамъ?

Вопросъ 5. Пусть максимальная длина прыжка равна 9 футамъ, минимальная—2 футамъ, а длина всего пути содержитъ 100 футовъ. Побѣдителемъ считается *тотъ, кто принудитъ* противника *первымъ достигнуть конечнаго пункта* или *первымъ перепрыгнуть черезъ него**).* Кто изъ играющихъ одержитъ побѣду въ этомъ случаѣ?

При осуществленіи этой игры на практикѣ, конечно, не всегда удобно «прыгать» на самомъ дѣлѣ.

Поэтому мы можемъ рекомендовать другой, болѣе спокойный способъ веденія этой игры, при чемъ интересъ состязанія отъ этого ничуть не ослабѣетъ.

Запаситесь листомъ бумаги и, вооружившись

*) «Максимальная»—т.-е., наибольшая: «минимальная»—т.-е. наименьшая.

**) При рѣшеніи этого вопроса не слѣдуетъ дѣлать разницы между выраженіями «достичь цѣли» и «перейти черезъ нее», тогда какъ, напр., при рѣшеніи вопроса 4 это различіе имѣетъ существенное значеніе.

— 10 —

карандашомъ, раздѣлите этотъ листъ вертикальной чертой пополамъ на двѣ полосы; надъ каждой изъ нихъ надпишите свое имя, а затѣмъ записывайте поочередно тѣ пункты, на которые каждый изъ васъ желалъ бы «прыгнуть»; тогда весь ходъ игры изобразится слѣдующимъ образомъ:

К о л я (начинаетъ).				П е т я.			
непремѣнно на 1 футъ.				хотя бы на 7			
"	"	12	"	"	"	"	20
"	"	23	"	"	"	"	24
"	"	34	"	"	"	"	39
"	"	45	"	"	"	"	55
"	"	56	"	"	"	"	59
"	"	67	"	"	"	"	75
"	"	78	"	"	"	"	80
"	"	89	"	"	"	"	91
"	"	100	" и	(проигралъ).			
выигрываетъ.							

Отвѣты на вопросы.

(Къ игрѣ „Взапуски“).

Вопросъ 1. В (второй) долженъ прыгнуть на 2 фута и затѣмъ продолжать игру, держась той тактики, какой держался А въ разсмотрѣнномъ состязаніи Коли и Пети.

Вопросъ 2. Побѣдитъ можетъ В, если онъ, сдѣлавши первый прыжокъ на 9 футовъ, будетъ продолжать игру, останавливаясь на слѣдующихъ пунктахъ: 18, 27, 36.....90.

Вопросъ 3. Побѣдитъ А, если онъ будетъ придерживаться слѣдующихъ остановокъ: 6, 24, 42, 60, 78, 96, 114, 132 и 150.

Вопросъ 4. Побѣдитъ В, если онъ, сдѣлавши первый прыжокъ на 13 футовъ, будетъ продолжать игру, останавливаясь на слѣдующихъ пунктахъ: 26, 39, 52, 65... и т. д.

Послѣднимъ остановочнымъ пунктомъ для В долженъ быть непременно пунктъ 169, а всякій другой, даже ближайшій, наприм. 170 или 171 въ данномъ случаѣ непригоденъ.

Дѣло въ томъ, что, если бы В оказался въ точкѣ 170 или 171, то, правда, А не могъ бы достигъ цѣли однимъ прыжкомъ; но А могъ бы прыгнуть на 180 или 181 и тогда принимая во вниманіе минимальную длину прыжка (3 фута)—В былъ бы принужденъ *перепрыгнуть* черезъ конечный пунктъ.

Въ такомъ случаѣ согласно условію игры, *ни одинъ* изъ играющихъ не могъ бы считаться побѣдителемъ (см. примѣч. на стр. 9).

Вопросъ 5. Побѣдителемъ, конечно, окажется тотъ, кто раньше попадетъ на 98 или 99, такъ какъ тогда принимая во вниманіе длину минимальнаго прыжка (2 фута)—для насъ будетъ ясно, что противнику придется сдѣлать такой прыжокъ, благодаря которому онъ или достигнетъ конечной цѣли или перепрыгнетъ черезъ нее. Такимъ образомъ, А могъ бы выиграть, если бы онъ, сдѣлавши первый прыжокъ на 10 футовъ, продолжалъ игру, останавливаясь послѣдовательно на пунктахъ: 21, 32, 43... и т. д. до 98. Но, при максимальной длинѣ прыжка (10 фут.), такой маршрутъ для А—невозможенъ. Точно также А не можетъ достигнуть и пункта 99 (при промежуточныхъ дистанціяхъ въ 11 фут.). Поэтому, если даже А и начинаетъ игру, то В всегда имѣетъ возможность сдѣлать первый прыжокъ на 11 фут., а затѣмъ продолжать игру, прыгая постоянно на 11 футовъ дальше, чѣмъ предыдущій разъ; тогда въ концѣ концовъ А будетъ принужденъ перепрыгнуть черезъ послѣднюю точку (100). Кромѣ такого приѣма, который мы указали и который В можетъ всегда примѣнить съ неизмѣннымъ успѣхомъ для себя, мы рассмотримъ еще

— 13 —

другой; если бы В. удалось послѣ своего перваго прыжка очутиться въ пунктѣ 10 (что, конечно, неважно, если онъ начинаетъ игру), то тогда онъ, подвигаясь каждый разъ на 11 футовъ, могъ бы въ концѣ концовъ оказаться въ пунктѣ 98 и тѣмъ самымъ заставить А первымъ достичь конечной цѣли или перепрыгнуть черезъ нее. Слѣдуетъ замѣтить, что второй приемъ оказывается непригоднымъ только тогда, если первый прыжокъ А (который начинаетъ игру) будетъ сдѣланъ на 9 футовъ; первый же приемъ примѣнимъ всегда.

Угадываніе чиселъ.

Угадать число, которое задумалъ вашъ товарищъ, и которое отъ васъ держится въ секретѣ!

Не правда ли, какъ это трудно на первый взглядъ? Но на самомъ дѣлѣ дѣло обстоитъ гораздо проще: если вы умѣете считать, и если у васъ есть немного такъ называемой «смекалки», то вы можете привести въ недоумѣніе всякаго, не посвященнаго въ эту тайну.

Приемовъ для угадыванія числа, которое вамъ, повидимому, неизвѣстно, существуетъ много, и познакомиться съ нѣкоторыми изъ нихъ крайне любопытно.

Начнемъ съ самаго простого случая.

1. Вы предлагаете одному изъ вашихъ собесѣдниковъ написать, не показывая вамъ, любое двузначное число, изображаемое различными цифрами, а потомъ попросите переставить цифры этого числа и изъ бѣльшаго числа вычесть меньшее; цифры полученной разности должны быть снова переставлены и вновь полученное число слѣдуетъ сложить съ полученною ранѣе разностью.

Послѣ того какъ вашъ собесѣдникъ выполнилъ всѣ указанная вами дѣйствія съ числами которыя вамъ неизвѣстны, вы съ увѣренностью заявляете, что въ конечномъ результатѣ всѣхъ этихъ дѣйствій получилось число 99.

— 15 —

Возьмемъ примѣръ.

Пусть задумано число 26; число, написанное тѣми же цифрами, но въ обратномъ порядкѣ, есть 62; послѣ вычитанія получается: $62 - 26 = 36$; эту разность надо сложить съ числомъ 63; тогда дѣйствительно получимъ:

$$36 + 63 = 99.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что можетъ случиться такъ, что послѣ вычитанія получится число однозначное; напр.

$$\begin{array}{r} 65 \\ - 56 \\ \hline 09 \end{array}$$

Въ такомъ случаѣ не надо забывать тотъ 0, который принято не писать передъ значущей цифрой; такимъ образомъ число, изображаемое тѣми же цифрами, какъ и наша разность, но въ обратномъ порядкѣ, есть 90.

Если вы возьмете еще нѣсколько подобныхъ примѣровъ, то убѣдитесь, что въ конечномъ результатѣ *непрѣменно* получается число 99.

Этой любопытной особенностью двузначныхъ чиселъ вы можете воспользоваться еще слѣдующимъ образомъ:

Объявите присутствующимъ, что вы заранее можете написать число, которое получится у каждаго изъ нихъ послѣ нѣкоторыхъ дѣйствій съ *различными*, задуманными ими числами. И, дѣйствительно, вы, написавши заранее на клочкѣ бумаги число 99 и положивши бумажку въ конвертъ, который для бóльшаго эффекта можете даже запечатать,—предложите каждому изъ при-

— 16 —

существующихъ (а ихъ можетъ быть сколько угодно!) задумать любое двузначное число и продѣлать съ нимъ всѣ тѣ дѣйствія, которыя были указаны выше. Вообразите, какое удивленіе выразится на ихъ лицахъ, когда вы попросите ближайшаго къ вамъ изъ присутствующихъ вскрыть конвертъ, посмотрѣть на то, что тамъ написано и, *молча*, передать записку сосѣду, который сдѣлаетъ то же самое. Разумѣется, каждый изъ нихъ убѣдится, что вы, если не магъ и волшебникъ, то во всякомъ случаѣ человекъ, умѣющій кое-что соображать.

Но, чтобы доказать, что такое мнѣніе о васъ справедливо, вы продолжайте свои опыты съ числами въ томъ же направленіи.

2. Предложите задумать любое *трехзначное* число (крайнія цифры должны быть различны), а, когда всѣ дѣйствія (такія же, какъ и въ первомъ случаѣ) будутъ продѣланы, то громогласно объявляйте, что въ результатѣ этихъ дѣйствій получилось число **1089**.

Провѣримъ это на какомъ-нибудь примѣрѣ.

Задуманное число. 368

Число, изображенное тѣми же цифрами,

но въ обратномъ порядкѣ 863

Послѣ вычитанія: 863—368 получится

$$\begin{array}{r}
 863 \\
 - 368 \\
 \hline
 \text{разность.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 495 \\
 \text{въ обратномъ порядкѣ} \quad . \quad 594 \\
 \hline
 \text{Окончат. результатъ:} \quad 1089.
 \end{array}$$

— 17 —

Весьма любопытно отмѣтить еще одну интересную особенность чиселъ, съ которыми производятся указанные дѣйствія.

Дѣло въ томъ, что, если вы продѣлали уже нѣсколько такихъ упражненій съ трехзначными числами, то, вѣроятно, замѣтили, что *средняя цифра разности всегда 9*. Дѣйствительно:

$$\begin{array}{r} 1) \quad \begin{array}{r} 893 \\ - 398 \\ \hline 495 \end{array} \quad 2) \quad \begin{array}{r} 901 \\ - 109 \\ \hline 792 \end{array} \quad 3) \quad \begin{array}{r} 351 \\ - 153 \\ \hline 198 \end{array} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Но этого мало! Если вы обратите вниманіе на *первую* цифру этой разности, то увидите, что **ее всегда можно получить, отнявъ отъ средней цифры послѣднюю**.

Въ самомъ дѣлѣ:

Первая цифра.	Средн. цифра.	Послѣд. цифра.
Для 1-го примѣра. . 4=	9 безъ	5
» 2-го » . . 7=	9 »	2
» 3-го » . . 1=	9 »	8

и т. д.

Зная все это, легко отгадать трехзначное число только по его послѣдней цифрѣ.

Для этого предложите задумать *любое* трехзначное число, затѣмъ переставить его цифры въ обратномъ порядкѣ, послѣ этого изъ боль-

— 18 —

шаго числа вычесть меньшее и сообщить вамъ *только* послѣднюю цифру полученной разности.

Пусть она будетъ 8. Но вы вѣдь знаете, что съ одной стороны средняя цифра той же разности есть всегда 9, а съ другой стороны первая цифра разности равна $9 - 8 = 1$. Сообразивши все это, вы имѣете возможность объявить, къ удивленію присутствующихъ, *все трехзначное число, а именно 198*, получившееся въ результатѣ дѣйствій съ *неизвѣстными* для васъ числами.

Разсмотрѣнные способы угадыванія числа, во-первыхъ, весьма просты и незамысловаты, а во-вторыхъ, они, собственно говоря, не даютъ намъ возможности угадать именно *то* число, *которое было задумано* кѣмъ-либо *первоначально*, такъ какъ при помощи указанныхъ пріемовъ, какъ это было видно, «угадывается» лишь *результатъ* одного и двухъ дѣйствій съ невѣдомыми «отгадчику» числами.

Поэтому несравненно интереснѣе научиться угадать, или, вѣрнѣе сказать, безошибочно назвать *то* число, которое выбралъ вамъ собесѣдникъ.

Для того, чтобы достичь этого, необходимо нѣсколько подготовить для себя почву, т. е. сдѣлать нѣсколько такихъ теоретическихъ выводовъ, которые могли бы намъ сослужить въ этомъ смыслѣ службу.

Съ этой цѣлью приглашаемъ читателя обратить все свое вниманіе на такой рядъ чиселъ:

1, 2, 4, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384,.... въ которомъ, какъ видно

— 19 —

каждое слѣдующее число *вдвое* больше, чѣмъ предыдущее.

Насколько быстро растутъ въ нашемъ ряду числа, можно судить по слѣдующему примѣру:

Предположимъ, что въ полночь было совершено какое-нибудь преступленіе, напр., убійство: если бы какой-либо очевидецъ преступленія, въ теченіе первыхъ 15 минутъ успѣлъ сообщить о видѣнномъ двумъ своимъ пріятелямъ, изъ которыхъ каждый въ теченіе слѣдующихъ 15 мин. передалъ бы эту вѣсть двумъ другимъ своимъ знакомымъ, еще не знавшимъ о преступленіи и т. д., то уже черезъ $7\frac{1}{2}$ часовъ объ этомъ событіи узнало-бы *все человечество*. Подтверждать сказанное вычисленіями мы здѣсь не будемъ, но самъ читатель, если бы онъ вздумалъ сдѣлать это, увидалъ бы, что черезъ $7\frac{1}{2}$ часовъ узнали бы о преступленіи 2000 милліоновъ человѣкъ, а это число даже превышаетъ численность людей, населяющихъ земной шаръ; по прошествіи же $7\frac{1}{2}$ час. передача извѣстія (указаннымъ способомъ) еще не прекратилась бы, потому что тогда о преступленіи были бы освѣдомлены только около 1000 милліоновъ человѣкъ; такимъ образомъ въ слѣдующія $\frac{1}{4}$ часа вѣсть о преступленіи получаютъ сразу новые 1000 милліоновъ человѣкъ т.-е. ровно столько, сколько во весь протекшій до того времени промежутокъ (т.-е. въ $7\frac{1}{4}$ час.)

Все, что мы сейчасъ сказали, основано на одномъ *особенномъ свойствѣ*, которымъ обладаетъ приведенный выше рядъ чиселъ: 1, 2, 4, 8, 16, 32..... и т. д.

Чтобы лучше уяснить себѣ это, мы временно припишемъ къ нашему ряду слѣва еще одну 1,

— 20 —

такъ что этотъ рядъ приметъ теперь такой видъ:

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. д.

Каждое число этого ряда можно разсматривать, какъ сумму предшествующихъ ему чиселъ, на примѣръ $4=1+1+2$.

$8=1+1+2+4$ и т. д.

Если это правило справедливо для первыхъ чиселъ нашего ряда, то оно должно остаться въ силѣ и для всѣхъ слѣдующихъ чиселъ ряда, что легко подтверждается, если изобразить сказанное такъ:

$$\begin{array}{c} 16 \\ \overbrace{1, 1, 2, 4, 8, 16, \dots} \\ 8 \end{array}$$

Отсюда читателю, быть можетъ, уже ясно, почему для дальнѣйшаго образованія чиселъ нашего ряда напр. послѣ числа 8, надо увеличить каждое число вдвое. Если же мы теперь отбросимъ прочь ту единицу, которую мы на нѣкоторое время призывали себѣ на помощь, то увидимъ, что сумма всѣхъ чиселъ до 4 (включительно) уже не 8, а только 7, т.-е. на 1 меньше того числа, которое идетъ вслѣдъ за 4.

Отсюда мы можемъ сдѣлать слѣдующій выводъ: **каждое число ряда чиселъ, послѣдовательно увеличивающихся вдвое, на единицу больше суммы всѣхъ предшествующихъ чиселъ.**

Такимъ образомъ, теперь ясно, почему въ разсмотрѣнномъ нами примѣрѣ *число людей*, узнавшихъ въ послѣдніе $\frac{1}{4}$ часа о совершенномъ

— 21 —

преступленіи, равняется той массѣ людей, которая получила извѣстіе во весь протекшій до тѣхъ поръ промежутокъ (т.-е. въ теченіе $7\frac{1}{4}$ час. или 29 четвертей часа); при этомъ мы пренебрегаемъ разностью, равной 1, такъ какъ при очень большихъ числахъ она значенія не имѣетъ.

Обращаясь снова къ нашему ряду чиселъ

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.....,

которые, кстати, при дальнѣйшемъ изложеніи мы будемъ называть **основными**, попробуемъ сдѣлать второй весьма важный для нашей цѣли (т.-е. для угадыванія задуманныхъ чиселъ) *выводъ*, а именно: **любое цѣлое число** (здѣсь имѣются въ виду не только основныя числа) **можно представить въ видѣ суммы основныхъ чиселъ, при чемъ всякое (но не каждое!) изъ этихъ чиселъ будетъ встрѣчаться не болѣе одного раза.**

Убѣдиться читателю въ справедливости такой истины будетъ нетрудно, если онъ внимательнѣе разсмотритъ слѣдующее:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & = & 1 \\
 2 & = & 2 \\
 3 & = & 1 + 2 \\
 4 & = & 4 \\
 5 & = & 1 + 4 \\
 6 & = & 2 + 4 \\
 7 & = & 1 + 2 + 4 \\
 8 & = & 8 \\
 9 & = & 1 + 8 \\
 10 & = & 2 + 8 \\
 11 & = & 1 + 2 + 8 \\
 12 & = & 4 + 8
 \end{array}$$

— 22 —

13=	1 +	4 + 8	
14=	2 + 4 + 8		
15=	1 + 2 + 4 + 8		
16=			16
17=	1 +		16
18=	2 +		16
19=	1 + 2 +		16
20=		4 +	16
21=	1 +	4 +	16
22=	2 + 4 +		16
23=	1 + 2 + 4 +		16
24=		8 +	16

и т. д.

Эта таблица можетъ быть продолжена сколь угодно и дальше, и изъ нея, казалось бы, ясно видно, что въ составъ слагаемыхъ любого изъ взятыхъ нами чиселъ (отъ 1 до 24) входятъ *исключительно наши основныя числа* 1, 2, 4, 8 и 16 и при томъ въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ *не болѣе одного раза*.

Само собой разумѣется, что, если читателю вздумалось бы продолжать начатую нами таблицу, то тогда въ качествѣ слагаемыхъ появились бы и слѣдующія основныя числа, т.-е. 32, 64, 128 и т.д.

Напримѣръ, возьмемъ число 97. Между прочимъ, не мѣшаетъ обратить вниманіе на тотъ способъ, который мы употребимъ сейчасъ при разложеніи этого числа на слагаемыя. Ближайшимъ къ 97 меньшимъ основнымъ числомъ является число 64; прибавляя къ 64 слѣдующее (меньшее) основное число, т.-е. 32, получимъ 96 (все еще меньше даннаго числа 97); очевидно, остается добавить 1 (а, вѣдь, она принадлежитъ также къ

основнымъ числамъ!) и мы будемъ имѣть, что

$$97 = 64 + 32 + 1.$$

Для болѣе успѣшнаго хода нашихъ занятій мы рекомендуемъ читателямъ твердо запомнить *хотя бы* первыя *одиннадцать* основныхъ чиселъ (т.-е. кончая числомъ 1024); этого вполне будетъ достаточно для того, чтобы впоследствии—какъ это будетъ показано—угадать *любое задуманное число, не превышающее 2047!*

Какъ видите, такой незначительный запасъ познаній обѣщаетъ открыть намъ настолько любопытныя тайны, что обладателю ихъ, право, могъ бы позавидовать любой изъ сказочныхъ чародѣевъ!

Перейдемъ, однако, къ интересующему насъ вопросу, тѣмъ болѣе, что *теперь* мы имѣемъ возможность съ успѣхомъ разрѣшить его.

Дѣло въ томъ, что найденное нами свойство любого изъ чиселъ (советуемъ еще разъ вспомнить, въ чемъ оно заключается!) можетъ быть примѣнено къ различнаго рода играмъ и интереснымъ, какъ для себя, такъ и для другихъ, занятіямъ,—а это и есть та цѣль, которую мы преслѣдуемъ: соединить пріятное съ полезнымъ.

Заранѣе скажемъ, что цѣль той игры, которую мы намѣрены сейчасъ предложить читателямъ, состоитъ въ *угадываніи* задуманнаго кѣмъ-либо изъ присутствующихъ *числа*.

Дѣло обстоитъ слѣдующимъ образомъ.

Прежде всего, если вы желаете познать искусство угадывать задуманныя числа, то вамъ придется заключить тайный союзъ съ кѣмъ-либо изъ вашихъ товарищей, которому необходимо усвоить слѣдующее:

— 24 —

1) число	1	будетъ	считаться	I	основн. числомъ
»	2	»	»	II	»
»	4	»	»	III	»
»	8	»	»	IV	»
»	16	»	»	V	»
»	32	»	»	VI	»
»	64	»	»	VII	»
»	128	»	»	VIII	»
»	256	»	»	IX	»
»	512	»	»	X	»
»	1024	»	»	XI	»

Какъ самыя числа, такъ и ихъ нумера, вашъ помощникъ долженъ знать *на память и въ любомъ порядкѣ*.

2) Затѣмъ вы должны заготовить 11 штукъ карточекъ изъ бѣлаго картона, при чемъ обратную сторону ихъ надо окрасить хотя бы въ черный цвѣтъ. Это дѣлается для того, чтобы вы могли условиться съ вашимъ помощникомъ въ слѣдующемъ: любая карточка, обращенная къ вамъ **черной** стороной, означаетъ то или другое **основное число**, а, будучи обращена **бѣлой** стороной, — указываетъ вамъ на то, что какое-то **основное число отсутствуетъ** и во вниманіе не принимается.

3) Наконецъ, въ нашей игрѣ эти 11 карточекъ, будучи разложены въ рядъ, будутъ означать соответственно 11 первыхъ основныхъ чиселъ.

Вотъ и всѣ тѣ тайны, которыя необходимо знать вамъ и вашему помощнику для того, чтобы въ любое время вызвать удивленіе и любопытство у непосвященныхъ.

Теперь расскажем, какъ будетъ происходить

самый «сеансъ». Вы заявляете присутствующимъ, что беретесь угадать любое задуманное кѣмъ-либо изъ нихъ число, однако не больше 2000; при чемъ обѣщаете, что средствомъ для этого будетъ служить *только* разложенныя на столѣ 11 карточекъ (обращенныя пока всѣ бѣлой стороной). Послѣ этого, попросивъ вашего товарища (помощника) быть свидѣтелемъ происходящаго, вы удаляетесь вовсе изъ комнаты и даже плотно притворяете за собою дверь.

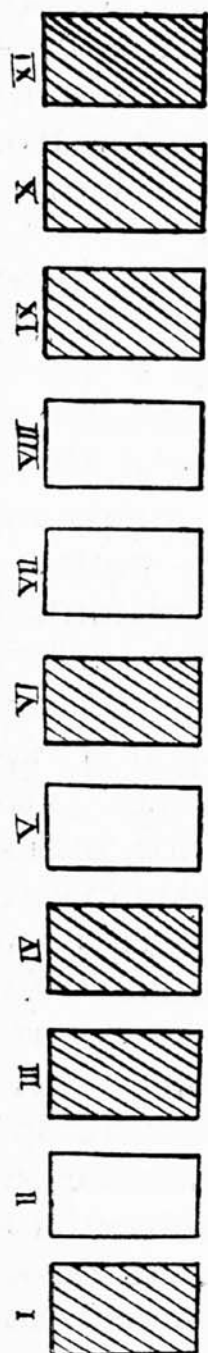
Вашъ товарищъ проситъ кого-либо изъ присутствующихъ назвать шепотомъ любое число, меньше 2000.

Допустимъ, что названо 1837, и все общество объ этомъ осведомлено.

Тогда вашъ товарищъ пускается на хитрость, понять которую способны только вы съ нимъ.

Онъ соображаетъ, что ближайшимъ (меньшимъ) основнымъ числомъ по отношенію къ задуманному числу (1837) является 1024, а потому, согласно условію онъ перевертываетъ черной стороной последнюю (XI) карточку. Далѣе, прибавляя (мысленно) къ 1024 слѣдующее (X) основное число, т.-е. 512, онъ убѣждается, что полученная сумма, а именно 1536, все еще *меньше* задуманнаго числа, и при этомъ онъ перевертываетъ карточку (X), соотвѣтствующую и числу 512. Затѣмъ онъ, мысленно прибавивъ къ 1536 слѣдующее (IX) основное число, т.-е. 256, видитъ, что и теперь получившаяся сумма, а именно 1792, меньше задуманнаго числа, а слѣдовательно необходимо показать, что, кромѣ 1024 и 512, въ составъ искомаго числа входитъ еще число 256,—иными словами надо перевернуть IX карточку. Попробовавъ

прибавить къ 1792 слѣдующее (т.-е. VIII) основное число 128, или даже меньшее (VII), т.-е. 64, вашъ товарищъ убѣждается, что въ обоихъ этихъ случаяхъ получается сумма больше задуманнаго



Фиг. 2.

числа, а потому, желая показать, что осн. числа 128 и 64 *не* должны быть принимаемы во вниманіе, оставляетъ карточки VIII и VII *въ покое*; но за то ему приходится (разсуждая и дальше совершенно такимъ же образомъ) перевернуть карточки: VI (соотв. основ. числу 32), IV (соотв. осн. числу 8), III (соотв. осн. числу 4) и, наконецъ, I (соотв. осн. числу 1). Карточки же V и II должны быть обращены бѣлой стороной.

Итакъ въ головѣ вашего помощника задуманное число 1837 представляется въ видѣ:

$$1 + 0 + 4 + 8 + 0 + 32 + 0 + \\ + 0 + 256 + 512 + 1024.$$

Но не забывайте, что въ то же время это число *условно* изображено и на столѣ при помощи карточекъ слѣдующимъ образомъ (фиг. 2):

Теперь представьте себѣ, какъ всѣ присутствующіе, наблюдавшіе за тѣмъ, что дѣлалъ вашъ товарищъ и старавшіеся понять: *что* изображаютъ эти карточки, *что* значитъ перевертываніе ихъ обратной стороной, *почему* ихъ 11 и т. д., — будутъ, вѣроятно, прямо поражены, когда

— 27 —

вы, по приглашенію вашего помощника, подойдя къ сто лу, гдѣ разложены карточки, внимательно посмотрѣвъ на нихъ, а затѣмъ что-то обдумавъ, торжественно *объявите, что задуманное число есть: 1837!*

А, вѣдь, такъ именно и будетъ на самомъ дѣлѣ!

Когда вы увидите, что карточки разложены на столѣ такъ, какъ показаны на фиг. 2, то вы соображайте слѣдующимъ образомъ:

XI карточка *перевернута*, слѣд. число 1024 идетъ въ счетъ;

X карточка *перевернута*, слѣд. число 512 идетъ въ счетъ;

IX карточка *перевернута*, слѣд. число 256 идетъ въ счетъ;

(VIII и VII карточки *не тронуты*, слѣд. числа 128 и 64 могутъ быть оставлены безъ вниманія);

VI карточка *перевернута*, слѣд. число 32 идетъ въ счетъ;

(V карточка *не тронута*, слѣд. число 16 во вниманіе *не* принимается);

IV карточка *перевернута*, слѣд. число 8 идетъ въ счетъ;

III карточка *перевернута*, слѣд. число 4 идетъ въ счетъ;

(II карточка *не тронута*, слѣд. число 2 во вниманіе *не* принимается);

I карточка *перевернута*, слѣд. число 1 идетъ въ счетъ.

Складывая послѣдовательно всѣ тѣ числа, которыя, какъ сказано выше, «идутъ въ счетъ», вы и получите то число, которое можете объявить

присутствующимъ съ торжествующимъ видомъ побѣдителя.

Чтобы покончить съ этой игрой, остается только добавить, что эффектъ, получаемый въ концѣ концовъ, увеличится еще болѣе, если вы будете пользоваться большимъ числомъ карточекъ: добавивъ къ уже имѣющимся 11-ти карточкамъ еще одну (XII), соответствующую основному числу 2048*), вы получите возможность угадать любое число до 4000 включительно; при 13-ти карточкахъ—можно угадать число, не болѣе 8000*) и т. д.

Само собой разумѣется, что съ прибавленіемъ лишнихъ карточекъ увеличивается и трудность угадыванія, такъ какъ при этомъ придется помнить *больше* основныхъ чиселъ и производить дѣйствія съ болѣе крупными числами.

Если же ограничиться 11-ю карточками (какъ мы это и сдѣлали въ приведенномъ примѣрѣ), то не думайте, что вамъ или вашему товарищу предстоитъ много труда и препятствій къ усвоенію всего того, что здѣсь рассказано.

Мы утверждаемъ это на томъ основаніи, что имѣли случай *лично* провѣрить на опытѣ пригодность описанной игры, при чемъ дѣйствующими лицами являлись ученицы V—VII классовъ одной изъ женскихъ гимназій.

4. Въ заключеніе мы опишемъ игру, которая (въ нѣсколько измѣненномъ видѣ) имѣется въ

*) Этотъ предѣлъ дается *приблизительно*.

книжкѣ Э. Лукаса (E. Lucas) «Математическія развлеченія», гдѣ эта игра носитъ названіе «Таинственный вѣрѣ».

Цѣль этой игры остается та же, т.-е. *угадать задуманное число*, но условія измѣняются: въ первыхъ, теперь уже не требуется помощи вашего товарища, а во-вторыхъ, вмѣсто тѣхъ карточекъ, которыя употреблялись въ предыдущемъ случаѣ, и на которыхъ не было ничего написано, теперь вамъ придется застисъ нѣсколькими картами, вѣрнѣе сказать таблицами чиселъ.

Эти карты-таблицы должны быть составлены по опредѣленному закону, при чемъ устройство ихъ основано опять-таки на томъ выводѣ, который мы сдѣлали ранѣе (см. стр. 20).

Для того, чтобы имѣть возможность угадать любое число, хотя бы отъ 1 до 32, надо составить пять таблицъ.

Напомнимъ читателямъ, что всякое число имѣетъ способность разлагаться на слагаемыя, изъ которыхъ каждое является однимъ для основныхъ чиселъ.

Это ясно видно изъ таблицы, помѣщаемой ниже и подтверждающей намъ выводъ изъ чиселъ отъ 1 до 31:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 2 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 4 &= 4 \\ 5 &= 1 + 4 \\ 6 &= 2 + 4 \\ 7 &= 1 + 2 + 4 \end{aligned}$$

— 30 —

8=		8
9=1+		8
10=	2+	8
11=1+	2+	8
12=	4+	8
13=1+	4+	8
14=	2+4+	8
15=1+	2+4+	8
16=		16
17=1+		16
18=	2+	16
19=1+	2+	16
20=	4+	16
21=1+	4+	16
22=	2+4+	16
23=1+	2+4+	16
24=	8+	16
25=1+	+8+	16
26=	2+	8+16
27=1+		8+16
28=	4+8+	16
29=1+	4+8+	16
30=	2+4+8+	16
31=1+	2+4+8+	16

и т. д.

Пользуясь этой таблицей, вы легко можете составить упомянутыя выше 5 картъ.

Для того, чтобы получить *таблицу I*, вы пишете (въ видѣ вертикальнаго столбца) всѣ тѣ числа, въ составъ которыхъ входитъ основное число 1. Проще говоря, на таблицу I придется помѣстить всѣ нечетныя числа отъ 1 до 31 включительно.

Чтобы составить *таблицу II*, вы должны выпи-

— 31 —

сать всѣ тѣ числа, въ составъ которыхъ входитъ основное число 2; такими числами будутъ:

2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15 30, 31.

Точно такимъ же образомъ должны быть составлены и остальные три таблицы, при чемъ:

для III табл. надо выписать числа, въ составъ которыхъ входитъ основное число 4;

для IV табл. надо выписать числа, въ составъ которыхъ входитъ основное число 8;

для V табл. надо выписать числа, въ составъ которыхъ входитъ основное число 16.

Наши таблицы, въ концѣ концовъ, будутъ имѣть такой видъ:

I.	II.	III.	IV.	V.
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

— 32 —

Такого приспособленія вполне достаточно для того, чтобы вы имѣли возможность угадать любое задуманное число, не болѣе 32.

Для этого вамъ слѣдуетъ только предложить вашимъ собесѣдникамъ *указать, въ какой изъ таблицъ встрѣчается задуманное число.*

Предположимъ вамъ отвѣтили, что задуманное число имѣется во II, IV и V таблицахъ.

Тогда вы можете безошибочно сказать, что задуманное число есть **26**.

Дѣло въ томъ, что вамъ придется замѣтить только *верхнія* числа, стоящія въ указанныхъ вамъ таблицахъ, т.-е. 2, 8 и 16; сумма этихъ чиселъ и даетъ задуманное число.

Читатель, вѣроятно, уже догадался, въ чемъ тутъ секретъ. Во всякомъ случаѣ мы укажемъ, что число 26 можетъ быть (согласно вышеупомянутому выводу) представлено въ видѣ:

$$26 = 16 + 8 + 2.$$

Слѣдовательно, оно, такъ сказать, «имѣетъ право» встрѣчаться только въ V, IV и II таблицахъ, въ чемъ легко убѣдиться, если вспомнить, какъ мы составляли эти таблицы.

Само собой разумѣется, что предѣлы, въ которыхъ можетъ быть задумано число, легко разширить, но благодаря этому и число заготовленныхъ таблицъ должно, конечно, увеличиться.

Такимъ образомъ:

Для угадыв. чиселъ отъ 1 — 64 необходимо 6 табл.;

» » » » 1—128 » 7 »

» » » » 1—256 » 8 »

и т. д.

— 33 —

5. Эта игра становится несравненно интереснѣе, если внести въ нее нѣкоторое измѣненіе.

Выберите 32 различныя картинки и, перенумеровавъ ихъ такъ, чтобы это не особенно броса-лось въ глаза, наклейте на большой картонный листъ. Затѣмъ вырѣжьте изъ картона 5 полосъ и наклейте:

на 1-ую табл. картины №№	1, 3, 5, 7, 9 и т. д.
на 2-ую табл. »	№№ 2, 3, 6, 7, 10 и т. д.
на 3-ью табл. »	№№ 4, 5, 6, 7, 12 и т. д.
на 4-ую табл. »	№№ 8, 9, 10, 11, 12 и т. д.
на 5-ую табл. »	№№ 16, 17, 18, 19, 20 и т. д. *).

Эти пять таблицъ и составляютъ на-з. «Таинственный вѣрь».

Однимъ словомъ, нумера картинъ, наклеенныхъ на ту или другую полосу, должны соотвѣтствовать числамъ, помѣщеннымъ на тѣхъ 5 таблицахъ-картахъ, которыя мы только что съ вами составляли.

Третій вариантъ той же игры мы получимъ, если вмѣсто картинъ мы возьмемъ имена (мужскія или женскія).

*) Само собой понятно, что ни числа 32, ни картины № 32 помѣщать не требуется, т. к., если к.-л. загадалъ это число, то ему пришлось бы сознаться, что задуманнаго числа на таблицахъ нѣтъ, а это равносильно тому, чтобы открыть задуманное число.

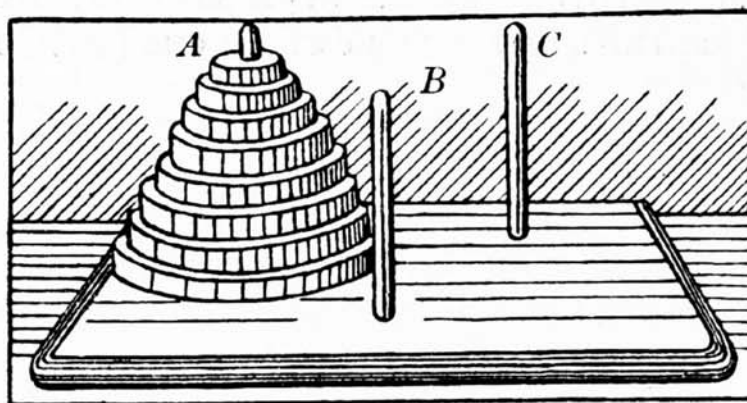
Башня Лукаса.

Эта игрушка, изобрѣтенная французскимъ математикомъ Э. Лукасомъ состоитъ изъ доски, въ которую вбиты три палки; на одной изъ палокъ насажено нѣсколько (на нашемъ рисункѣ восемь) просверленныхъ въ центрѣ кружковъ различной величины и при томъ такъ, что они образуютъ нѣчто въ родѣ пирамиды.

Игра состоитъ въ томъ, что **всѣ кружки надо переложить на одну изъ двухъ другихъ палочекъ, при чемъ разрѣшается перекладывать только по одному кружку и не иначе, какъ меньшій кружокъ на большій, а не наоборотъ.**

Само собою разумѣется, что надо постараться достигнуть этой цѣли возможно скорѣе, избѣгая при этомъ лишнихъ перемѣщеній кружковъ.

Пусть въ началѣ игры всѣ кружки сидятъ на палкѣ А (какъ показано на фиг. 3), и требуется ихъ переложить на палку С.



Фиг. 3.

Вообразимъ сначала, что мы имѣемъ дѣло только съ *двумя* кружочками, такъ что остальные 6 пред-

полагаемъ на нашей фигурѣ какъ бы несуществующими. Ясно, что въ такомъ случаѣ можно, снявши верхній кружокъ, надѣть его на В, затѣмъ нижній (большій) кружокъ переложить съ А на С и, наконецъ, первый кружокъ перемѣстить съ В на С. Такимъ образомъ, для рѣшенія этой задачи при 2-хъ кружкахъ требуется совершить только 3 перекладыванія.

Сдѣлаемъ теперь то же самое для *трехъ* кружковъ (а именно: для 1-го, 2-го и 3-го сверху, остальные — какъ бы не существуютъ); прежде всего 1-й, а потомъ 2-ой кружокъ мы переносимъ на свободныя палочки; тогда 3-й кружокъ будетъ возможно перенести на палочку С, которую къ тому времени уже нужно совершенно освободить отъ кружковъ, для чего 1 и 2 кружки могутъ перенесены на В; замѣтимъ, что это послѣднее перемѣщеніе представляетъ собою повтореніе уже рѣшенной выше задачи, гдѣ требовалось сдѣлать 3 перекладыванія (а именно: 1 кружокъ съ А на С, 2-ой кружокъ съ А на В и 1 кружокъ съ С на В). Вотъ тутъ-то 3-й кружокъ и можетъ быть переложень на С, а потомъ уже 1 и 2 кружки могутъ перейти съ В на С, для чего потребуются также 3 перекладыванія (а именно: 1 кружокъ съ В на А, 2 кружокъ съ В на С, 1 кружокъ съ А на С). Такимъ образомъ, для рѣшенія нашей задачи при 3-хъ кружкахъ требуется совершить уже 7 перекладываній. Теперь видно, что дальше наша работа пойдетъ такъ же: при перенесеніи съ А на С 4-хъ кружковъ надо прежде всего переложить 3 кружка (1-й, 2-й, 3-й) съ А на В (7 перекладываній), потомъ 4-й кр. перенести съ А на С, и тогда кружки 1-й, 2-й, 3-й переклады-

вать съ В на С (7 переключиваній). Такимъ образомъ при обмѣнѣ кружочками, который происходилъ между палками В и С, намъ пришлось повторить рѣшеніе нашей задачи съ 3 кружками.

Если въ предыдущемъ случаѣ мы начинали рѣшеніе задачи такъ: «1 кр. съ А на С», то въ слѣдующемъ случаѣ (съ 4-мя кружками) пришлось начинать иначе: «1 кр. съ А на В».

Подводя итогъ сказанному, мы видимъ, что игра должна начинаться слѣдующимъ образомъ:

при 2 кружкахъ	«1 кр. съ А на В»
» 3	» «1 кр. съ А на С»
» 4	» «1 кр. съ А на В».

Такъ какъ каждый разъ, когда мы въ нашей задачѣ увеличиваемъ число кружковъ на 1, намъ приходится повторять переключиванія съ палки В на С (или обратно), то, очевидно, и въ дальнѣйшемъ начинать игру надо всегда такъ: или «1 кр. съ А на В» или «1 кр. съ А на С», причемъ *первое начало* имѣетъ мѣсто въ случаѣ *четнаго* числа кружковъ, участвующихъ въ задачѣ, а *второе начало* — въ случаѣ *нечетнаго* числа кружковъ.

Называя палочку С «*конечной* палкой», а палочку В «*промежуточной* палкой», мы теперь можемъ дать слѣдующее правило: Чтобы начать игру съ нечетнымъ числомъ кружковъ, надо самый маленькій кружокъ класть на конечную палку, а при игрѣ съ четнымъ числомъ кружковъ — на промежуточную палку.

Для простѣйшаго случая, т.-е. для игры съ однимъ кружкомъ это правило остается въ си-

— 37 —

лѣ: тогда этотъ кружокъ придется, вѣдь, только переложить съ А. на С.

Для числа перекладываній, которыя надо совершить въ разсмотрѣнныхъ нами случаяхъ, мы нашли, что:

при 1 кружкѣ	1 перекладываніе
» 2 кружкахъ	3 перекладыванія
» 3 »	7 перекладываній
» 4 »	15 »

Если бы даже читатель уже успѣлъ подмѣтить законъ составленія этихъ чиселъ, то мы все-таки считаемъ болѣе благоразумнымъ сначала поставить такіе *вопросы*:

сколько перекладываній приходится на долю 1-го кружка, если всѣхъ ихъ при 4-хъ кружкахъ было сдѣлано 15? Сколько перекладываній приходится въ томъ же случаѣ на долю 2-го кружка? и т. д.

Мы видѣли, что при 2 кружкахъ пришлось совершить всего 3 перекладыванія, изъ коихъ 2 надо отнести на долю 1 кружка и одно на долю 2-го.

Короче все это можно записать такъ:

для 2-хъ кружковъ.

1-й кр.		2 перекл.
2-й »		1 »

Всего 3 перекл.

При 3 кружкахъ наша операція разбивается на слѣдующія 3 стадіи:

- 1) 1-й и 2-й кружки переводимъ съ А на В,
- 2) 3-й кружокъ переводимъ съ А на С и
- 3) кружки 1-й и 2-й переводимъ съ В на С.

— 38 —

Отсюда видно, что, такъ какъ операцію съ 2 кружками здѣсь пришлось производить *дважды*, то число перекладываній для кружковъ 1-го и 2-го въ данномъ случаѣ придется удвоить; слѣдовательно мы получили теперь:

для 3-хъ кружковъ.

1-й кр.		4	перекл.
2-й »		2	»
3-й »		1	»

Всего 7 перекл.

Такимъ же образомъ разсуждая дальше, мы будемъ имѣть:

для 4-хъ кружковъ.

1-й кр.		8	перекл.
2-й »		4	»
3-й »		2	»
4-й »		1	»

Всего 15 перекл.

Для каждого отдѣльнаго кружка *числа перекладываній* (если считать снизу ввѣрхъ, напри-

мѣръ для послѣдняго случая: 1, 2, 4, 8) суть уже знакомыя намъ основныя числа и то же самое окажется не только въ приведенныхъ простѣйшихъ случаяхъ, но и далѣе, если бы мы стали продолжать прибавлять къ числу кружковъ по 1, а число перекладываній—удваивать. Общее число перекладываній для каждаго случая на 1 меньше, чѣмъ послѣдующее основное число, такъ напри- мѣръ, при 5 кружкахъ общее число перекладываній будетъ 31 (т.-е. $32-1$).

Попробуйте сообразить, на основаніи всего сказаннаго, слѣдующее: сколько перекладываній придется совершить въ случаѣ 7 кружковъ?—Сколько перекладываній при этомъ придется на долю 1 кружка?—На долю 5-го кружка?—Какое перекладываніе совершится при этомъ прежде всего?

Игра съ иглой.

Въ 1654 году французъ Мэрэ, ведя игру съ геніальнымъ математикомъ Паскалемъ, предложилъ своему сопернику разрѣшить два затрудненія, встрѣтившіяся при игрѣ. По этому поводу у нихъ возгорѣлись безчисленные споры, имѣвшие такое важное послѣдствіе, какъ появленіе особой отрасли математическихъ наукъ, извѣстной до сихъ поръ подъ названіемъ *теоріи вѣроятностей*.

Чтобы дать читателямъ хотя бы отдаленное представленіе объ этой теоріи, мы приведемъ такой примѣръ.

Вообразите, что у насъ имѣется ящикъ, содержащій въ *равномъ* количествѣ бѣлые и черные шары, перемѣшанные въ достаточной степени. Если бы вы вздумали вынимать изъ этого ящика по одному шару, а затѣмъ, замѣтивъ цвѣтъ вынутого шара, бросать его обратно въ ящикъ, и если бы это довольно скучное и однообразное занятіе вы имѣли терпѣніе продолжать возможно дольше, то обнаружился бы слѣдующій неожиданный законъ:

число вынутыхъ бѣлыхъ шаровъ оказалось бы почти во столько разъ меньше (или больше)*)

*) Въ томъ случаѣ, если опытъ продолжается достаточно долго.

общаго числа вынутыхъ шаровъ, во сколько разъ число бѣлыхъ шаровъ, оставшихся въ вазѣ, меньше (или больше) общаго числа шаровъ, содержащихся въ ящикѣ.

Пояснимъ это примѣромъ.

Допустимъ, что въ ящикѣ имѣется всего 1000 шаровъ, изъ коихъ бѣлыхъ—600 штукъ.

Послѣ продолжительнаго выниманія шаровъ (при чемъ вынутые шары клались обратно въ ящикъ) оказалось всего вынуто 850 шаровъ, изъ коихъ бѣлыхъ—510 штукъ.

Провѣряя справедливость заявленнаго закона, мы получимъ такую пропорцію:

$$\begin{aligned} & 510 : 850 = 600 : 1000; \\ \text{или *)} : & 510 \cdot 1000 = 850 \cdot 600 \\ & 510000 = 510000. \end{aligned}$$

Мы со своей стороны рекомендовали бы интересующимся читателямъ провѣрить на собственномъ опытѣ, *на сколько* справедливъ этотъ законъ. Но во всякомъ случаѣ замѣтимъ, что достоинство мысли, выраженной въ этомъ законѣ, возрастаетъ по мѣрѣ того, чѣмъ: 1) *дольше* продолжаютъ указанный опытъ и 2) *больше шаровъ* имѣется въ ящикѣ.

Такимъ образомъ мы познакомили читателя въ общихъ чертахъ съ однимъ изъ законовъ, которые даетъ намъ теорія вѣроятностей.

Перейдемъ теперь къ описанію «*игры съ иглой*», которая можетъ послужить для нашихъ читателей интересной математической забавой и кото-

*) Произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ членовъ пропорціи.

рая можетъ привести ихъ въ удивленіе своимъ неожиданнымъ и вмѣстѣ съ тѣмъ простымъ *результатомъ*, являющимся также однимъ изъ законовъ вышеупомянутой теоріи.

Возьмите большой (20×16 вершк.) листъ бумаги и начертите на немъ, на одинаковомъ разстояніи другъ отъ друга, рядъ параллельныхъ линій. Затѣмъ подберите иголку такой длины, чтобы она была *вдвое* меньше разстоянія между двумя сосѣдними параллельными линіями. Вотъ и все, что необходимо для нашей игры.

Теперь, вооружившись терпѣніемъ, приступайте къ самому опыту.

Въ присутствіи нѣсколькихъ лицъ вы начинаете подбрасывать надъ листомъ бумаги свою иголку, при чемъ предлагаете одному изъ присутствующихъ записывать *число встрѣчъ иголки съ какой-либо изъ параллельныхъ линій*, а другому — *общее число всѣхъ бросаній*.

Если вы возьмете на себя трудъ бросить иголку хотя бы сто разъ, то и тогда уже будетъ возможно обнаружить желаемый результатъ.

Попробуйте раздѣлить (съ точностью до 0,01) общее число всѣхъ бросаній на число встрѣчъ иголки съ одной изъ параллельныхъ, — и у васъ въ результатъ, *вѣроятно*, получится число 3,14.

А тѣмъ изъ васъ, кто знакомъ съ геометрией, должно быть извѣстно, что это число есть не что иное, какъ *отношеніе любой окружности къ своему діаметру*, — число, обозначаемое, обыкновенно греческой буквой π и равное

3, 1415926.... *)

*) Кстати упомянуть объ одномъ очень удобномъ способѣ для запоминанія этого числа; выучите слѣд. французскую фразу: Que

Итакъ, найденное въ вашемъ опытѣ отношеніе, вслѣдствіе какой-то невѣдомой причины почти совпадаетъ съ числомъ, имѣющимъ мѣсто и значеніе совершенно въ другой области, а именно въ геометріи.

Какъ же объяснить столь неожиданный результатъ?

Отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ теорія вѣроятностей (*теорема Бернулли*), и мы не будемъ вдаваться въ разсужденіе по этому поводу, а предоставимъ только нашимъ читателямъ заинтересоваться этимъ явленіемъ и провѣрить самый фактъ на опытѣ.

Но считаемъ не лишнимъ обратить вниманіе на то, что указанное отношеніе выражаетъ собою *вѣроятность каждой встрѣчи*; иными словами: послѣ *трехъ* бросаній иголки мы имѣемъ право и основаніе предполагать, что *одно* изъ нихъ даетъ въ результатъ встрѣчу иглы съ линіей.

Практическое правило описываемой игры нѣсколько измѣняется въ томъ случаѣ, когда длина иглы *не равна* половинѣ разстоянія между двумя параллельными линіями (но не больше всего этого разстоянія).

Въ этомъ случаѣ приходится находить:

1) Во сколько разъ число всѣхъ бросаній больше числа встрѣчъ иглы съ линіей (какъ и въ 1-мъ случаѣ) и

2) Во сколько разъ *удвоенная длина иголки больше* (или меньше?) *разстоянія между двумя параллельными линіями*.

j'aime à faire apprendre un nombre utile aux hommes, (*какъ я люблю заставлять заниматься числомъ, полезнымъ для людей*); подсчитывая число буквъ въ каждомъ словѣ этой фразы, вы всегда можете возобновить въ своей памяти число $\pi = 3,1415926536....$

— 45 —

Когда эти два частных найдены, то первое изъ нихъ слѣдуетъ *умножить* на второе,—и въ результатѣ должно опять получиться число, близкое къ 3,14159...

Пояснимъ сказанное примѣромъ, приведеннымъ у самихъ авторовъ «игры съ иглой».

Они бросали двухдюймовую (точнѣе: 1,965 дм.) иголку 10000 разъ, при чемъ разстояніе между двумя параллельными линіями было равно $2\frac{1}{2}$ дюймамъ (=2,5 дм.).

При подсчетѣ встрѣчъ иглы съ к.-л. изъ линій оказалось, что таковыхъ произошло 5009.

Согласно приведенному выше правилу, находимъ отношенія:

$$\text{во-первыхъ: } \frac{10000}{5009} \text{ и}$$

$$\text{во-вторыхъ: } \frac{2,1,965}{2,5} = \frac{3,93}{2,5} = \frac{39,3}{25}.$$

Если теперь вы потрудитесь помножить первое отношеніе на второе, то полученное произведеніе окажется равнымъ (съ точн. до 0,001):

3,140, а число, $\pi=3,141$ (съ тою же точн.).

Какъ видите полученное число, показывающее, какъ уже сказано, вѣроятность каждой встрѣчи,

только на $\frac{1}{1000}$ отличается отъ совершенно чуждаго ему числа π !

Этимъ мы и закончимъ свою первую бесѣду съ нашими читателями, при чемъ еще разъ со-вѣтуемъ: *не вѣрить вамъ на-слово, а убѣждаться самимъ на дѣлѣ.*



ОГЛАВЛЕНІЕ.

	<i>Стр.</i>
Игра «взапуски»	5
Угадываніе чиселъ	14
Башня Лукаса	34
Игра съ иглой	40